

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.25

ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧИ ДЛЯ АБСТРАКТНОГО
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩЕГО
ДРОБНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ АДАМАРА

© 2011 г. А. В. Глушак, Т. А. Манаенкова

В банаховом пространстве исследуется задача типа Коши с левосторонней дробной производной Адамара порядка $\alpha \in (0, 1)$, а также задача Коши с регуляризованной дробной производной Адамара. Устанавливается корректная разрешимость рассматриваемых задач как с ограниченным оператором, так и с генератором сильно непрерывной полугруппы. Для обратных коэффициентных задач указаны достаточные условия их однозначной разрешимости.

1. Задача типа Коши с дробной производной Адамара. Пусть X – банахово пространство, B – линейный, замкнутый, плотно определенный оператор в X с областью определения $D(B)$ и непустым резольвентным множеством. При $0 < \alpha < 1$ рассмотрим задачу типа Коши

$${}^A D_{1+}^{\alpha} u(t) = Bu(t), \quad t > 1, \quad (1)$$

$$\lim_{t \rightarrow 1+} {}^A I_{1+}^{1-\alpha} u(t) = u_0, \quad (2)$$

где

$${}^A I_{a+}^{1-\alpha} u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{-\alpha} u(s) \frac{ds}{s}$$

– левосторонний дробный интеграл Адамара порядка $1 - \alpha$, $a > 0$ (см. [1, с. 250; 2, с. 110]),
 ${}^A D_{a+}^{\alpha} u(t) = t \frac{d}{dt} {}^A I_{a+}^{1-\alpha} u(t)$ – левосторонняя дробная производная Адамара порядка $\alpha \in (0, 1)$,
 $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция, $u_0 \in X$.

Примеры решения некоторых конкретных дифференциальных уравнений с дробными производными Адамара могут быть найдены в [2, с. 212; 3]. Отметим также, что доказываемые в дальнейшем результаты были анонсированы в [4].

Определение 1. Решением задачи (1), (2) называется непрерывная при $t > 1$ функция $u(t)$ такая, что ${}^A I_{1+}^{1-\alpha} u(t)$ представляет собой непрерывно дифференцируемую при $t > 1$ функцию, $u(t)$ принимает значения в $D(B)$ и удовлетворяет задаче (1), (2).

Определение 2. Задача (1), (2) называется равномерно корректной, если существуют заданная на X , коммутирующая с B операторная функция ${}^A T_{\alpha}(t)$ и числа $M > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ такие, что для любого $u_0 \in D(B)$ функция ${}^A T_{\alpha}(t)u_0$ является ее единственным решением и при этом

$$\|{}^A T_{\alpha}(t)\| \leq M(\ln t)^{\alpha-1} t^{\omega}, \quad t > 1.$$

Наряду с уравнением (1) мы также будем рассматривать и неоднородное уравнение

$${}^A D_{1+}^{\alpha} u(t) = Bu(t) + h(t), \quad t > 1. \quad (3)$$

Замена независимой переменной t и неизвестной функции $u(t)$

$$t = e^{\tau}, \quad \tau > 0, \quad u(t) = u(e^{\tau}) = v(\tau) \quad (4)$$

переводит задачи (1), (2) и (3), (2) в уже исследованные задачи для дифференциальных уравнений с дробной производной Римана–Лиувилля $D_{0+}^{\alpha}v(\tau) = \frac{d}{d\tau}I_{0+}^{1-\alpha}v(\tau)$, где

$$I_{0+}^{1-\alpha}v(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\tau} (\tau-s)^{-\alpha}v(s) ds$$

– левосторонний дробный интеграл Римана–Лиувилля порядка $1-\alpha$. Указанные замены переводят уравнение (1), начальное условие (2) и уравнение (3) в следующие соотношения:

$$D_{0+}^{\alpha}v(\tau) = Bv(\tau), \quad \tau > 0, \quad (5)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0+} I_{0+}^{1-\alpha}v(\tau) = u_0, \quad (6)$$

$$D_{0+}^{\alpha}v(\tau) = Bv(\tau) + h(e^{\tau}), \quad \tau > 0. \quad (7)$$

Разрешимость задач (5), (6) и (7), (6) установлена в [5]. Поэтому ниже в теоремах 1–3 мы переформулируем нужные нам результаты о разрешимости задач (1), (2) и (3), (2), содержащих дробные производные Адамара.

Пусть далее $L(X)$ – пространство линейных ограниченных операторов, действующих из X в X , $E_{\alpha,\beta}(\cdot)$ – функция Миттаг–Леффлера, определяемая соотношением

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n\alpha + \beta)}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0.$$

Теорема 1. Пусть $B \in L(X)$, $u_0 \in X$, функция $h(t) \in C(1, \infty)$ абсолютно интегрируема в окрестности точки $t = 1$. Тогда задача (1), (2) равномерно корректна и

$${}^A T_{\alpha}(t)u_0 = (\ln t)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((\ln t)^{\alpha} B)u_0,$$

а неоднородная задача (3), (2) имеет единственное решение, определяемое равенством

$$u(t) = (\ln t)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((\ln t)^{\alpha} B)u_0 + \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(\left(\ln \frac{t}{s}\right)^{\alpha} B\right) h(s) \frac{ds}{s}.$$

В дальнейшем нами будет использована неотрицательная функция

$$f_{\tau,\alpha}(t) = t^{-1} e_{1,\alpha}^{1,0}(-\tau t^{-\alpha}),$$

$$e_{\alpha,\beta}^{\mu,\delta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \mu)\Gamma(\delta - \beta n)}, \quad \alpha > \max\{0; \beta\}, \quad \mu, z \in C,$$

где $e_{\alpha,\beta}^{\mu,\delta}(z)$ – функция типа Райта (см. [6, гл. 1]).

Условие 1. Начальный элемент u_0 принадлежит $D(B)$ и оператор B является производящим оператором экспоненциально ограниченной полугруппы $T(t)$ класса C_0 , причем $\|T(t)\| \leq M e^{\omega t}$.

Теорема 2. Пусть выполнено условие 1. Тогда однородная задача (1), (2) равномерно корректна и при этом

$${}^A T_{\alpha}(t)u_0 = \int_0^{\infty} f_{\tau,\alpha}(\ln t) T(\tau) u_0 d\tau, \quad (8)$$

$$\|{}^A T_{\alpha}(t)\| \leq M (\ln t)^{\alpha-1} t^{\omega_1}, \quad \omega_1 > \omega^{1/\alpha}. \quad (9)$$

Условие 2. Выполнено одно из следующих требований: а) функция $h(t) \in C(1, \infty)$ абсолютно интегрируема в окрестности точки $t = 1$ и принимает значения в $D(B)$, функция $Bh(t) \in C(1, \infty)$ также абсолютно интегрируема в окрестности точки $t = 1$; б) функция ${}^A I_{1+}^{1-\alpha} h(t)$ непрерывна при $t \geq 1$, непрерывно дифференцируема при $t > 1$ и ${}^A D^\alpha h(t)$ абсолютно интегрируема в окрестности точки $t = 1$.

Теорема 3. Пусть задача (1), (2) равномерно корректна, $u_0 \in D(B)$ и выполнено условие 2. Тогда задача (3), (2) имеет единственное решение, определяемое равенством

$$u(t) = {}^A T_\alpha(t)u_0 + \int_1^t {}^A T_\alpha\left(\frac{t}{s}\right)h(s) \frac{ds}{s}. \quad (10)$$

2. Задача Коши с регуляризованной дробной производной Адамара. На непрерывных при $t \geq a > 0$ функциях $u(t)$, имеющих левостороннюю дробную производную Адамара порядка $\alpha \in (0, 1)$, определим регуляризованную дробную производную Адамара

$${}^A \partial_{a+}^\alpha u(t) = {}^A D_{a+}^\alpha (u(t) - u(a)) = {}^A D_{a+}^\alpha u(t) - \left(\ln \frac{t}{a}\right)^{-\alpha} \frac{u(a)}{\Gamma(1-\alpha)}$$

и рассмотрим следующую задачу Коши:

$${}^A \partial_{1+}^\alpha u(t) = Bu(t) + h(t), \quad t \geq 1, \quad (11)$$

$$u(1) = u_0. \quad (12)$$

Определение 3. Решением задачи (11), (12) называется непрерывная при $t \geq 1$ функция $u(t)$ такая, что ${}^A I_{1+}^{1-\alpha} u(t)$ представляет собой непрерывно дифференцируемую при $t \geq 1$ функцию, $u(t)$ принимает значения в $D(B)$ и удовлетворяет задаче (11), (12).

Определение 4. Однородная задача (11), (12) ($h(t) \equiv 0$) называется равномерно корректной, если существуют заданная на X , коммутирующая с B операторная функция ${}^A S_\alpha(t)$ и числа $M > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ такие, что для любого $u_0 \in D(B)$ функция ${}^A S_\alpha(t)u_0$ является ее единственным решением и при этом

$$\|{}^A S_\alpha(t)\| \leq Mt^\omega, \quad t \geq 1.$$

Замена (4) преобразует задачу (11), (12) в задачу

$$\partial_{0+}^\alpha v(\tau) = Bv(\tau) + h(e^\tau), \quad \tau \geq 0, \quad (13)$$

$$v(0) = u_0 \quad (14)$$

с дробной производной Капуто $\partial_{0+}^\alpha v(\tau) = D_{0+}^\alpha (v(\tau) - v(0))$.

Однородная ($h(t) \equiv 0$) задача (13), (14) исследована в работе [7, гл. 2]. Пусть $g_{\tau,\alpha}(t) = t^{-\alpha} e_{1,\alpha}^{1,1-\alpha}(-\tau t^{-\alpha})$, учитывая теорему 3.1 [7], мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 4. Пусть выполнено условие 1. Тогда однородная задача (11), (12) равномерно корректна и при этом

$${}^A S_\alpha(t)u_0 = \int_0^\infty g_{\tau,\alpha}(\ln t)T(\tau)u_0 d\tau, \quad (15)$$

$$\|{}^A S_\alpha(t)\| \leq Mt^{\omega_1}, \quad \omega_1 > \omega^{1/\alpha}. \quad (16)$$

Следствие. Пусть задача (1), (2) равномерно корректна и $\ln t = s$. Тогда решение задачи (1), (2) и решение однородной задачи (11), (12) связаны соотношением

$${}^A S_\alpha(\exp s)u_0 = I_{0+,s}^{1-\alpha} {}^A T_\alpha(\exp s)u_0.$$

Это утверждение следует непосредственно из формулы 1.2.12 монографии [6].

Условие 3. Выполнено одно из следующих требований: а) функция $h(t) \in C[1, \infty)$ принимает значения в $D(B)$, $Bh(t) \in C[1, \infty)$; б) функция $h(t)$ непрерывно дифференцируема при $t \geq 1$.

Теорема 5. Пусть $u_0 \in D(B)$, задача (1), (2) равномерно корректна и выполнено условие 3. Тогда задача (11), (12) имеет единственное решение, определяемое равенством

$$u(t) = {}^A S_\alpha(t)u_0 + \int_1^t {}^A T_\alpha\left(\frac{t}{s}\right)h(s) \frac{ds}{s}. \quad (17)$$

Доказательство. Покажем, что при выполнении условия 3 функция

$$w(t) = \int_1^t {}^A T_\alpha\left(\frac{t}{s}\right)h(s) \frac{ds}{s}$$

удовлетворяет нулевому начальному условию (12). Учитывая неравенство (9) и непрерывность функции $h(t)$, при $t \in [1, 1 + \delta]$, $\delta > 0$ оценим норму функции $w(t)$:

$$\left\| \int_1^t {}^A T_\alpha\left(\frac{t}{s}\right)h(s) \frac{ds}{s} \right\| \leq M_0 t^{\omega_1} \int_1^t (\ln t - \zeta)^{\alpha-1} d\zeta = \frac{M_0 t^{\omega_1}}{\alpha} (\ln t)^\alpha.$$

Следовательно, функция $w(t)$ удовлетворяет нулевому начальному условию (12).

Для функции $w(t)$, обращающейся в нуль при $t = 1$, справедливо равенство ${}^A \partial_{1+}^\alpha w(t) = {}^A D_{1+}^\alpha w(t)$, поэтому в силу теоремы 3 первое слагаемое в правой части (17) удовлетворяет однородному уравнению (11) и условию (12), а второе, как следует из теоремы 4, удовлетворяет уравнению (11) и нулевому начальному условию (12). При этом условие 3 обеспечивает необходимую гладкость решения. Теорема доказана.

В случае, когда оператор B ограничен, утверждения теорем 4 и 5 принимают следующий вид (ср. с формулой (4.1.66) из [2]).

Теорема 6. Пусть $B \in L(X)$, $u_0 \in X$, функция $h(t)$ принадлежит $C[1, \infty)$. Тогда однородная задача (11), (12) равномерно корректна и

$${}^A S_\alpha(t)u_0 = E_{\alpha,1}((\ln t)^\alpha B)u_0, \quad (18)$$

а неоднородная задача (11), (12) имеет единственное решение, определяемое равенством

$$u(t) = E_{\alpha,1}((\ln t)^\alpha B)u_0 + \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(\left(\ln \frac{t}{s}\right)^\alpha B\right)h(s) \frac{ds}{s}. \quad (19)$$

3. Обратная задача. Рассмотрим задачу определения функции $u(t)$, принадлежащей $D(B)$ при $t \in (1, e]$, и элемента $p \in X$ из условий

$${}^A D_{1+}^\alpha u(t) = Bu(t) + (\ln t)^{k-1}p, \quad (20)$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} {}^A I_{1+}^{1-\alpha} u(t) = u_0, \quad (21)$$

$$\lim_{t \rightarrow e} {}^A I_{1+}^\beta u(t) = u_1, \quad (22)$$

где $k > 0$, ${}^A I_{1+}^\beta u(t)$ – левосторонний дробный интеграл Адамара порядка $\beta \geq 0$ (${}^A I_{1+}^\beta$ – единичный оператор при $\beta = 0$). Промежуток $t \in (1, e]$ выбран для более компактной записи формул.

Определение 5. Решением задачи (20)–(22) называется пара $(u(t), p)$, где $u(t) \in D(B)$ – непрерывная при $t \in (1, e]$ функция такая, что ${}^A I_{1+}^{1-\alpha} u(t)$ представляет собой непрерывно дифференцируемую при $t \in (1, e]$ функцию, $p \in X$, $u(t)$ и p удовлетворяют соотношениям (20)–(22).

Задачу (20)–(22) называют обратной задачей в противоположность прямой задаче типа Коши (20), (21) с известным элементом $p \in X$. Рассматриваемую задачу можно интерпретировать как восстановление в уравнении (20) нестационарного слагаемого $(\ln t)^{k-1}p$ с помощью дополнительного граничного условия (22).

Обзор публикаций по обратным задачам для уравнений целого порядка можно найти в [8], а обратная задача (20)–(22) рассматривается впервые.

Теорема 7. Пусть $B \in L(X)$, $u_0, u_1 \in X$. Для того чтобы задача (20)–(22) имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы на спектре $\sigma(B)$ ограниченного оператора B выполнялось условие

$$E_{\alpha, k+\alpha+\beta}(z) \neq 0, \quad z \in \sigma(B). \quad (23)$$

Доказательство. Задача (20)–(22) в силу теоремы 1 сводится к задаче нахождения функции $u(t)$ и элемента $p \in X$ таких, что справедливо соотношение

$$u(t) = (\ln t)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}((\ln t)^\alpha B) u_0 + \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} \left(\left(\ln \frac{t}{s} \right)^\alpha B \right) (\ln s)^{k-1} p \frac{ds}{s}. \quad (24)$$

Из равенства (24) и граничного условия (22) для нахождения неизвестного элемента p получаем уравнение

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow e} {}^A I_{1+}^\beta \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} \left(\left(\ln \frac{t}{s} \right)^\alpha B \right) (\ln s)^{k-1} p \frac{ds}{s} = \\ = u_1 - \lim_{t \rightarrow e} {}^A I_{1+}^\beta ((\ln t)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}((\ln t)^\alpha B) u_0). \end{aligned} \quad (25)$$

Учитывая полугрупповое свойство операции дробного интегрирования, вычисляем

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow e} {}^A I_{1+}^\beta \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} \left(\left(\ln \frac{t}{s} \right)^\alpha B \right) (\ln s)^{k-1} p \frac{ds}{s} = \\ = \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k+\beta)} \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^1 (1-\tau)^{k+\beta-1} \tau^{j\alpha+\alpha-1} \frac{B^j p}{\Gamma(j\alpha+\alpha)} d\tau = \\ = \Gamma(k) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B^j p}{\Gamma(j\alpha+k+\alpha+\beta)} = \Gamma(k) E_{\alpha, k+\alpha+\beta}(B) p. \end{aligned} \quad (26)$$

Аналогично имеем $\lim_{t \rightarrow e} {}^A I_{1+}^\beta ((\ln t)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}((\ln t)^\alpha B) u_0) = E_{\alpha, \alpha+\beta}(B) u_0$.

Тогда уравнение (25) в операторном виде имеет представление

$$G_0 p = q_0, \quad (27)$$

где

$$G_0 p = E_{\alpha, k+\alpha+\beta}(B) p, \quad q_0 = \frac{1}{\Gamma(k)} (u_1 - E_{\alpha, \alpha+\beta}(B) u_0). \quad (28)$$

Необходимым и достаточным условием однозначной разрешимости задачи (20)–(22) с ограниченным оператором B является разрешимость уравнения (27), т.е. отсутствие в спектре $\sigma(G_0)$ оператора G_0 точки $\lambda = 0$. В силу (28) оператор G_0 является аналитической функцией оператора B . По теореме об отображении спектра ограниченного оператора имеем $\sigma(G_0) = \sigma(E_{\alpha, k+\alpha+\beta}(B)) = E_{\alpha, k+\alpha+\beta}(\sigma(B))$. Следовательно, значение $\lambda = 0$ не является точкой спектра оператора G_0 только тогда, когда на спектре оператора B не обращается в нуль функция $E_{\alpha, k+\alpha+\beta}(z)$. Теорема доказана.

Из теоремы 7 следует, что расположение нулей функции $E_{\alpha, k+\alpha+\beta}(z)$ определяет однозначную разрешимость задачи (20)–(22) с ограниченным оператором B . Как указано в [9], для уравнения первого порядка с неограниченным оператором B условие вида (23) уже не будет достаточным условием однозначной разрешимости, хотя расположение нулей также играет важную роль. Поэтому мы приведем нужные нам результаты из работы [11] об их расположении. В теореме 1 из [11] установлено, что при $\alpha \in (0, 1)$, $k + \alpha + \beta > 0$ и подходящей нумерации все достаточно большие по модулю нули μ_n , $n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, функции $E_{\alpha, k+\alpha+\beta}(z)$ просты и при $n \rightarrow \pm\infty$ справедлива асимптотика

$$\mu_n^{1/\alpha} = 2\pi ni + (k + \beta - 1) \left(\ln 2\pi |n| + \frac{\pi i}{2} \operatorname{sign} n \right) + \ln \frac{\alpha}{\Gamma(k + \beta)} + o(1), \quad n \rightarrow \pm\infty. \quad (29)$$

Установим необходимое условие единственности решения обратной задачи (20)–(22) с неограниченным оператором B .

Теорема 8. Пусть B – линейный замкнутый оператор в X и обратная задача (20)–(22) имеет решение $(u(t), p)$. Для того чтобы это решение было единственным, необходимо, чтобы ни один нуль μ_n целой функции $E_{\alpha, k+\alpha+\beta}(z)$ не являлся собственным значением оператора B .

Доказательство. Пусть некоторый нуль μ_n из счетного множества нулей функции $E_{\alpha, k+\alpha+\beta}(z)$ является собственным значением оператора B с собственным вектором $h_n \neq 0$. Рассмотрим функцию $w(t) = \psi(t)h_n$ и выберем функцию $\psi(t)$ так, чтобы функция $w(t)$ удовлетворяла уравнению (20) при $p = h_n$ и нулевому начальному условию (21).

Легко проверить, что для нахождения функции $\psi(t)$ получим задачу

$${}^A D_{1+}^\alpha \psi(t) = \mu_n \psi(t) + (\ln t)^{k-1}, \quad \lim_{t \rightarrow 1} {}^A I_{1+}^{1-\alpha} \psi(t) = 0. \quad (30)$$

По теореме 1 задача (30) имеет единственное решение, которое представимо в виде

$$\psi(t) = \int_1^t \left(\ln \frac{t}{x} \right)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} \left(\mu_n \left(\ln \frac{t}{x} \right)^\alpha \right) (\ln x)^{k-1} \frac{dx}{x}.$$

Так как μ_n – нуль функции $E_{\alpha, k+\alpha+\beta}(z)$, то аналогично (26) получим, что

$$\lim_{t \rightarrow e} {}^A I_{1+}^\beta \psi(t) = \Gamma(k) \lim_{t \rightarrow e} {}^A I_{1+}^{\beta+k} ((\ln t)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\mu_n (\ln t)^\alpha)) = \Gamma(k) E_{\alpha, k+\alpha+\beta}(\mu_n) = 0.$$

Функция $w(t) = \psi(t)h_n$ удовлетворяет уравнению (20) при $p = h_n$ и нулевым условиями (21) и (22), что противоречит предположению единственности решения, поскольку пара $(u(t) + w(t), p + h_n)$ также является решением задачи (20)–(22). Теорема доказана.

Далее установим однозначную разрешимость задачи (20)–(22) с неограниченным оператором B , удовлетворяющим условию 1. Как и при доказательстве теоремы 7, сведем задачу (20)–(22), учитывая равенство (10), к операторному уравнению

$$Gp = q, \quad (31)$$

$$Gp = \lim_{t \rightarrow e} {}^A I_{1+}^{k+\beta} T_\alpha(t)p, \quad G: X \rightarrow X, \quad (32)$$

где ${}^A T_\alpha(t)$ определяется формулой (8),

$$q = \frac{1}{\Gamma(k)}(u_1 - \lim_{t \rightarrow e} {}^A I_{1+}^\beta ({}^A T_\alpha(t)u_0)), \quad q \in D(B). \quad (33)$$

Таким образом, однозначная разрешимость задачи (20)–(22) сводится к задаче о существовании у ограниченного оператора G , заданного соотношением (32), обратного оператора, определенного на некотором подмножестве банахова пространства X . Для выяснения последнего факта мы получим более удобное для исследований представление оператора B с помощью резольвенты $R(z) = (zI - B)^{-1}$, сузив при этом область определения оператора G до плотного в X множества $D(B)$.

Теорема 9. Пусть выполнено условие 1. Тогда для любого $p \in D(B)$ справедливо представление

$$Gp = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} E_{\alpha, k+\alpha+\beta}(z) R(z) p \, dz, \quad \sigma > \omega. \quad (34)$$

Доказательство. Пусть сначала p принадлежит $D(B^2)$, тогда $p = R^2(\lambda)p_0$, $p_0 \in X$, где $\lambda \in \rho(B)$, $\rho(B)$ – резольвентное множество оператора B , $\operatorname{Re} \lambda > \sigma > \omega$. Из (32), учитывая представление полугруппы $T(t)$ через резольвенту производящего оператора, получаем, что

$$\begin{aligned} Gp &= \frac{1}{\Gamma(k+\beta)} \lim_{t \rightarrow e} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{k+\beta-1} \frac{ds}{s} \int_0^\infty f_{\tau, \alpha}(\ln s) T(\tau) p \, d\tau = \\ &= \frac{1}{\Gamma(k+\beta)} \lim_{t \rightarrow e} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{k+\beta-1} \frac{ds}{s} \int_0^\infty f_{\tau, \alpha}(\ln s) \, d\tau \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{z\tau} R(z) R^2(\lambda) p_0 \, dz. \end{aligned} \quad (35)$$

Применяя в равенстве (35) для выражения $R(z)R^2(\lambda)$ тождество Гильберта, получаем соотношение

$$R(z)R^2(\lambda) = \frac{R(z) - R(\lambda)}{\lambda - z} R(\lambda) = \frac{R(z)}{(\lambda - z)^2} - \frac{R(\lambda)}{(\lambda - z)^2} - \frac{R^2(\lambda)}{\lambda - z}$$

и, учитывая, что по лемме Жордана интегралы по прямой $\operatorname{Re} z = \sigma$ от функций вида $\frac{\exp(z\tau)R^j(\lambda)p_0}{(\lambda - z)^{3-j}}$, $j = 1, 2$, обращаются в нуль, будем иметь

$$Gp = \frac{1}{\Gamma(k+\beta)} \lim_{t \rightarrow e} \int_0^{\ln t} (\ln t - s)^{k+\beta-1} ds \int_0^\infty f_{\tau, \alpha}(s) \, d\tau \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\exp(z\tau)R(z)p_0}{(\lambda - z)^2} dz.$$

Выразив $f_{\tau, \alpha}(s)$ по формуле $f_{\tau, \alpha}(t) = t^{-1}e_{1, \alpha}^{1,0}(-\tau t^{-\alpha})$ и воспользовавшись формулой дробного интегрирования Римана–Лиувилля функции типа Райта (см. [6, формула (1.2.12)])

$$\frac{1}{\Gamma(k+\beta)} \int_0^\eta (\eta - \rho)^{k+\beta-1} \rho^{-1} e_{1, \alpha}^{1,0}(-\tau \rho^{-\alpha}) \, d\rho = \eta^{k+\beta-1} e_{1, \alpha}^{1, k+\beta}(-\tau \eta^{-\alpha}),$$

закключаем, что

$$Gp = \int_0^\infty e_{1, \alpha}^{1, k+\beta}(-\tau) \, d\tau \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\exp(z\tau)R(z)p_0}{(\lambda - z)^2} dz =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{R(z)p_0 dz}{(\lambda-z)^2} \int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} \xi^{-k-\beta} e^\xi d\xi \int_0^\infty \exp(z\tau) \exp(-\tau\xi^\alpha) d\tau = \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{R(z)p_0 dz}{(\lambda-z)^2} \int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} \frac{\xi^{-k-\beta} e^\xi}{\xi^\alpha - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z) \frac{R(z)p_0}{(\lambda-z)^2} dz = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z) \frac{R(z)((\lambda-z)I + (zI - B))(\lambda I - B)p}{(\lambda-z)^2} dz = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)}{\lambda-z} R(z)(\lambda I - B)p dz, \quad p \in D(B^2), \tag{36}
\end{aligned}$$

при этом мы считали $\operatorname{Re} \xi^\alpha > \operatorname{Re} z$ и использовали равенство (1.1.12) из [6]

$$e_{1,\alpha}^{1,k+\beta}(-\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \xi^{-k-\beta} \exp(\xi - \tau\xi^\alpha) d\xi$$

и формулу [1, формула (1.93)]

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} \frac{\xi^{-k-\beta} e^\xi}{\xi^\alpha - z} d\xi = E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z).$$

Если обозначить $p_1 = (\lambda I - B)p$, то $p_1 \in D(B)$, $p = R(\lambda)p_1$ и равенство (36) примет вид

$$GR(\lambda)p_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)}{\lambda-z} R(z)p_1 dz, \quad p_1 \in D(B). \tag{37}$$

Левая и правая части равенства (37) представляют собой ограниченные операторы, которые совпадают на $D(B)$. В силу плотности $D(B)$ в X равенство (37) верно при всех $p_1 \in X$. Но тогда $p = R(\lambda)p_1 \in D(B)$ и для таких p справедливо представление

$$Gp = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)}{\lambda-z} R(z)((\lambda-z)I + (zI - B))p dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z) R(z)p dz.$$

Теорема доказана.

Переходим теперь к установлению достаточных условий однозначной разрешимости задачи (20)–(22). Как следует из теоремы 8, нам придется потребовать, чтобы ни один нуль μ_n функции $E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)$ не являлся собственным значением оператора B . Более того, для установления разрешимости потребуем, чтобы все нули принадлежали резольвентному множеству $\rho(B)$. Учитывая их асимптотику (29), отметим, что при $k + \beta > 1$ условие будет налагаться лишь на конечное число нулей μ_n , $n = 1, 2, \dots, n_0$, с $\operatorname{Re} \mu_n^{1/\alpha} < \sigma$, поскольку остальные автоматически принадлежат $\rho(B)$. В случае $k + \beta \leq 1$ нулей с $\operatorname{Re} \mu_n^{1/\alpha} < \sigma$ будет счетное множество.

Теорема 10. Пусть оператор B удовлетворяет условию 1, $k + \beta > 1$, $\sigma > \omega$ и $u_0, u_1 \in D(B^3)$. Если каждый нуль μ_n , $n = 1, 2, \dots, n_0$, функции $E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)$ с $\operatorname{Re} \mu_n^{1/\alpha} < \sigma$ принадлежит $\rho(B)$, то задача (20)–(22) имеет единственное решение.

Доказательство. Существование единственного решения задачи (20)–(22) (или операторного уравнения (31)) сводится к существованию обратного у ограниченного оператора G , определяемого равенством (32) (или (34)). При $u_0, u_1 \in D(B^3)$ в силу инвариантности $D(B)$ относительно $T_\alpha(t)$ правая часть уравнения (31) q принадлежит $D(B^3)$. Покажем, что оператор G имеет обратный оператор $G^{-1} : D(B^3) \rightarrow X$.

Поскольку каждый нуль $\mu_n^{1/\alpha}$ функции $E_{\alpha, k+\alpha+\beta}(z^\alpha)$ с $\operatorname{Re} \mu_n^{1/\alpha} < \sigma$ принадлежит $\rho(B)$, то он принадлежит $\rho(B)$ вместе с некоторой круговой окрестностью Ω_n . Пусть Γ – контур на комплексной плоскости, состоящий из прямой $\operatorname{Re} z = \sigma > \omega$ и границ γ_n круговых окрестностей Ω_n , т.е. $\Gamma = \{\operatorname{Re} z = \sigma\} \cup_{\operatorname{Re} \mu_n^{1/\alpha} < \sigma} \gamma_n$.

Возьмем $\lambda \in \rho(B)$, $\operatorname{Re} \lambda > \sigma > \omega$, и рассмотрим ограниченный оператор

$$\Upsilon q = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{R(z)q dz}{E_{\alpha, k+\alpha+\beta}(z)(z-\lambda)^3}, \quad \Upsilon : E \rightarrow E. \quad (38)$$

Отметим, что интеграл в (38) абсолютно сходится в силу выбора контура Γ , неравенства Хилле–Иосиды $\|R^n(z)\| \leq M/(\operatorname{Re} z - \omega)^n$, $n \in \mathbb{N}$, и асимптотического поведения функции Миттаг–Леффлера при $0 < \alpha < 2$ и $|z| \rightarrow \infty$ (см. [10, с. 134])

$$E_{\alpha, \mu}(z) = \frac{1}{\alpha} z^{(1-\mu)/\alpha} \exp(z^{1/\alpha}) - \sum_{j=1}^n \frac{z^{-j}}{\Gamma(\mu - \alpha j)} + O\left(\frac{1}{|z|^{n+1}}\right), \quad (39)$$

$$|\arg z| \leq \nu\pi, \quad \nu \in (\alpha/2, \min\{1, \alpha\}),$$

$$E_{\alpha, \mu}(z) = - \sum_{j=1}^n \frac{1}{\Gamma(\mu - \alpha j)z^j} + O\left(\frac{1}{|z|^{n+1}}\right), \quad \nu\pi \leq |\arg z| \leq \pi. \quad (40)$$

Пусть $q \in D(B)$, $\sigma < \sigma_1 < \operatorname{Re} \lambda$. Тогда, подставляя представление (34) в (38) и применяя тождество Гильберта, получаем равенство

$$\begin{aligned} \Upsilon Gq &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{R(z) dz}{E_{\alpha, k+\alpha+\beta}(z)(z-\lambda)^3} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} E_{\alpha, k+\alpha+\beta}(\xi) R(\xi) q d\xi = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} \frac{E_{\alpha, k+\alpha+\beta}(\xi)}{E_{\alpha, k+\alpha+\beta}(z)(z-\lambda)^3} \frac{R(z)q - R(\xi)q}{\xi - z} d\xi dz. \end{aligned} \quad (41)$$

Интеграл в (41) абсолютно сходится. Изменяя порядок интегрирования, будем иметь

$$\begin{aligned} \Upsilon Gq &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \frac{R(z)q dz}{E_{\alpha, k+\alpha+\beta}(z)(z-\lambda)^3} \int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} \frac{E_{\alpha, k+\alpha+\beta}(\xi) d\xi}{\xi - z} - \\ &- \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} E_{\alpha, k+\alpha+\beta}(\xi) R(\xi) q d\xi \int_{\Gamma} \frac{dz}{E_{\alpha, k+\alpha+\beta}(z)(z-\lambda)^3(\xi - z)}. \end{aligned} \quad (42)$$

Внутренний интеграл во втором слагаемом (42) равен нулю в силу выбора контура Γ и леммы Жордана, а для вычисления интегралов в первом слагаемом используем интегральную формулу Коши. Таким образом, при $q \in D(B)$ справедливо равенство

$$\Upsilon Gq = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{R(z)q}{(z-\lambda)^3} dz = R^3(\lambda)q.$$

Коммутирующие операторы Υ , G , $R(\lambda)$ ограничены и область определения $D(B)$ плотна в X , поэтому равенство $\Upsilon Gq = R^3(\lambda)q$ справедливо и для $q \in X$, $\Upsilon G : X \rightarrow D(B^3)$. Отсюда следует, что оператор $G^{-1}q = (\lambda I - B)^3 \Upsilon q$ при $q \in D(B^3)$ является обратным по отношению к G . Действительно,

$$GG^{-1}q = G(\lambda I - B)^3 \Upsilon q = G\Upsilon(\lambda I - B)^3 q = R^3(\lambda)(\lambda I - B)^3 q = q, \quad q \in D(B^3),$$

$$G^{-1}Gq = (\lambda I - B)^3 \Upsilon Gq = q, \quad q \in X.$$

В решении задачи (20)–(22) принадлежащий X элемент p имеет вид $p = (\lambda I - B)^3 \Upsilon q$, где элемент $q \in D(B^3)$ определяется равенством (33), оператор Υ – равенством (38), $\lambda \in \rho(B)$, $\operatorname{Re} \lambda > \sigma > \omega$, а для функции $u(t)$ справедливо представление

$$u(t) = {}^A T_\alpha(t) u_0 + \int_1^t (\ln s)^{k-1} {}^A T_\alpha\left(\frac{t}{s}\right) p \frac{ds}{s}$$

с оператором ${}^A T_\alpha(t)$, определенным формулой (8). Теорема доказана.

В случае $k + \beta \leq 1$, как уже отмечалось, у функции $E_{\alpha, k+\alpha+\beta}(z)$ будет счетное множество нулей μ_n с $\operatorname{Re} \mu_n^{1/\alpha} < \sigma$, поэтому мы потребуем выполнения следующего условия.

Условие 4. Каждый нуль μ_n , $n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, функции $E_{\alpha, k+\alpha+\beta}(z)$ с $\operatorname{Re} \mu_n^{1/\alpha} < \sigma$ принадлежит $\rho(B)$ и существуют $\varepsilon \in [0, 1)$ и $d > 0$ такие, что $\sup_{\operatorname{Re} \mu_n^{1/\alpha} < \sigma} \|R(\mu_n)/\mu_n^\varepsilon\| \leq d$.

Теорема 11. Пусть выполнены условия 1 и 4, $k + \beta \leq 1$ и $u_0, u_1 \in D(B^3)$. Тогда задача (20)–(22) имеет единственное решение.

Доказательство. Так же, как и в теореме 10, введем оператор Υ , определяемый равенством (38). В этом случае контур Γ содержит уже счетное множество окружностей γ_n , и для доказательства абсолютной сходимости интеграла в равенстве (38) рассмотрим интеграл по окружностям γ_n , где n достаточно большие ($|n| \geq n_0$). Тогда по теореме о вычетах имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\bigcup_{|n| \geq n_0} \gamma_n} \frac{R(z)q dz}{E_{\alpha, k+\alpha+\beta}(z)(z - \lambda)^3} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ |n| \geq n_0}}^{+\infty} \frac{R(\mu_n)q}{E'_{\alpha, k+\alpha+\beta}(\mu_n)(\lambda - \mu_n)^3}, \quad (43)$$

при этом, учитывая соотношение (см. [10, формула (1.5), с. 118])

$$E'_{\alpha, k+\alpha+\beta}(\mu_n) = \frac{1}{\alpha \mu_n} (E_{\alpha, k+\alpha+\beta-1}(\mu_n) - (k + \alpha + \beta - 1) E_{\alpha, k+\alpha+\beta}(\mu_n))$$

и асимптотики (39) и (29), получаем равенство

$$\begin{aligned} E'_{\alpha, k+\alpha+\beta}(\mu_n) &= \frac{1}{\alpha \mu_n} \left(\frac{\mu_n^{(2-k-\beta)/\alpha-1} (2\pi|n|)^{k+\beta-2} \exp(i \operatorname{Im} \mu_n^{1/\alpha})}{\Gamma(k + \beta - 1)} - \frac{1}{\Gamma(k + \beta - 1) \mu_n} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(k + \alpha + \beta - 1) \mu_n^{(1-k-\beta)/\alpha-1} (2\pi|n|)^{k+\beta-1} \exp(i \operatorname{Im} \mu_n^{1/\alpha})}{\Gamma(k + \beta)} + \frac{k + \alpha + \beta - 1}{\Gamma(k + \beta) \mu_n} + O\left(\frac{1}{|\mu_n|^2}\right) \right) = \\ &= \frac{1}{\alpha \mu_n^{2-1/\alpha}} \left(\frac{\exp(i \operatorname{Im} \mu_n^{1/\alpha})}{\Gamma(k + \beta)} \left(\frac{2\pi|n|}{\mu_n^{1/\alpha}} \right)^{1-k-\beta} + O\left(\frac{1}{|\mu_n|^{1/\alpha}}\right) \right). \end{aligned} \quad (44)$$

В силу равенства (44), условия 4 и асимптотики нулей (29) ряд (43), а следовательно, и интеграл по $\bigcup \gamma_n$ абсолютно сходятся. Сходимость же интеграла по прямой $\operatorname{Re} z = \sigma$ в равенстве (38) следует из неравенства Хилле–Иосиды и асимптотики (40).

Дальнейшее доказательство аналогично доказательству теоремы 10, мы его опускаем и тем самым завершаем доказательство теоремы 11.

Замечание. В обратной задаче для уравнения с регуляризованной дробной производной Адамара, как следует из формул (10), (17), влияние неоднородности на вид решения задачи Коши в случае регуляризованной дробной производной Адамара определяется тем же выражением, что и в случае нерегуляризованной дробной производной Адамара. Поэтому и условие разрешимости обратной задачи для уравнения с регуляризованной дробной производной Адамара при $k \geq 1$ будет таким, как и в теоремах 10 и 11.

Работа выполнена в рамках ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 годы (госконтракт 02.740.11.0613).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987.
2. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and application of fractional differential equations. Math. Studies. V. 204. Elsevier, 2006.
3. Килбас А.А., Марзан А.А., Титюра А.А. Дробные интегралы и производные типа Адамара и дифференциальные уравнения дробного порядка // Докл. РАН. 2003. Т. 389. № 6. С. 734–738.
4. Глушак А.В., Манаенкова Т.В. Абстрактные дифференциальные уравнения, содержащие дробные производные Адамара // Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. академии наук. 2009. Т. 11. № 1. С. 17–20.
5. Глушак А.В. О задаче типа Коши для неоднородного абстрактного дифференциального уравнения с дробной производной // Вестн. ВГУ. Сер. Физика, математика. Воронеж, 2002. № 1. С. 121–123.
6. Псху А.В. Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка. Нальчик, 2005.
7. Bajlekova E. Fractional Evolution Equations in Banach Spaces // Ph. D. Thesis, Eindhoven University of Technology, Eindhoven. 2001.
8. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York; Basel, 2000.
9. Эйдельман Ю.С. Двухточечная краевая задача для дифференциального уравнения с параметром // Докл. АН УССР. Сер. А. 1983. № 4. С. 15–18.
10. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М., 1966.
11. Седлецкий А.М. О нулях функции типа Миттаг–Леффлера // Мат. заметки. 2000. Т. 68. Вып. 5. С. 710–724.

Белгородский государственный университет

Поступила в редакцию
30.04.2009 г.